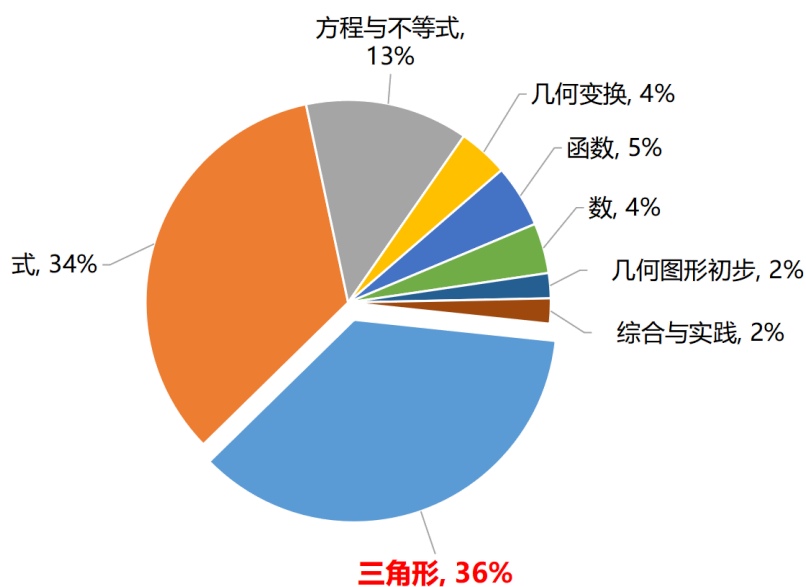


第1讲三角形的边

三角形是所有图形的基础，属于人教版教材第十一、十二、十三章的重点内容，涉及到三角形、全等三角形、轴对称等知识点，体系结构较为完整，同时也是期中、期末考试的重要考察点。本模块《三角形初步》，重点包括三角形基础概念，包括边、角等重要元素，需要学生在理解概念的基础上，总结一定的解题思路，为后续综合练习，以及全等三角形相关知识的学习奠定基础。

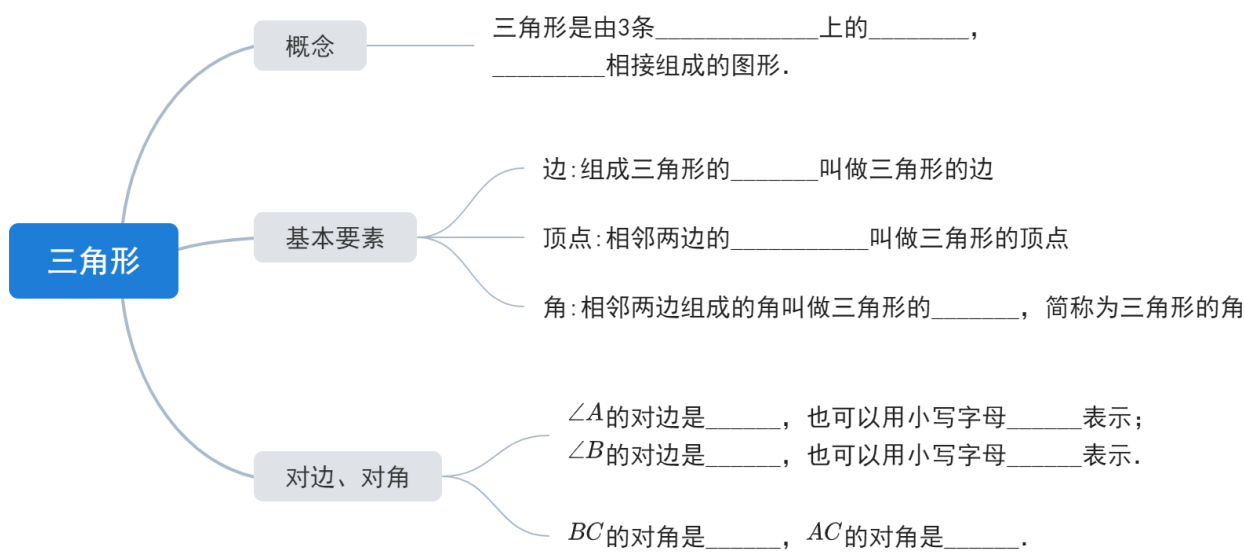
本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块分为三角形的边、三角形的角2讲内容，配套练习与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
三角形的概念与分类	★★	低
三角形的三边关系	★★★	中
高线、中线、角平分线	★★★	高
三角形的内角和	★★	高
三角形的外角	★★★	高
多边形与正多边形	★★★	中

一、三角形的相关概念



【备注】1.三角形的定义

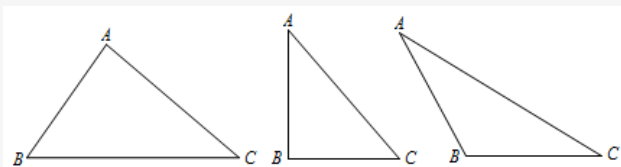
三角形是由3条**不在同一条直线上的线段**, **首尾依次相接**组成的图形.

顶点是 **A 、 B 、 C** 的三角形, 记作 $\triangle ABC$, 读作“三角形 ABC ”.

【注意】

1. 三角形概念包含三层含义: ①顶点不在同一直线上; ②三条线段; ③首尾顺次连接.
2. 三角形的表示方法中“ $\triangle$ ”代表三角形, 后边的字母为三角形的三个顶点, 字母的顺序可以自由安排, 即 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACB$ 、 $\triangle BCA$ 为同一三角形.

2.三角形的基本要素: 边、顶点、角



(1) 组成三角形的**线段**叫做三角形的**边**. 如: 线段 **AB 、 BC 、 AC** 分别是三角形的三条边;

(2) 相邻两边的**公共端点**叫做三角形的**顶点**. 如: 点 **A 、 B 、 C** 分别是三角形的三个顶点;

(3) 相邻两边组成的角叫做三角形的**内角**, 简称为三角形的**角**. 如: $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 分别是三角形的三个内角.

3.三角形的对边、对角

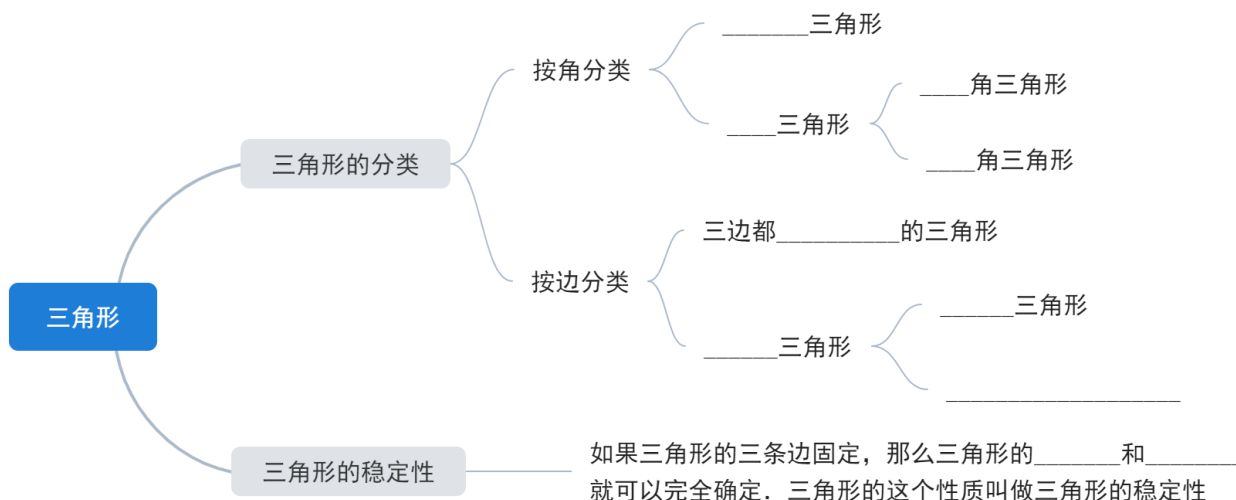
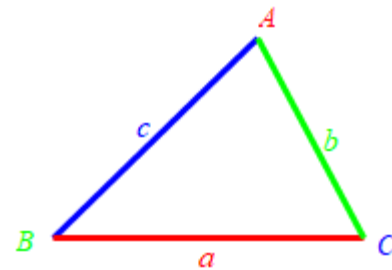
(1) 在三角形内一个角对着一边, 那么这条边就叫做这个角的**对边**.

如: $\angle A$ 的对边是 **BC** , 也可以用小写字母 **a** 表示;

$\angle B$ 的对边是 **AC** , 也可以用小写字母 **b** 表示.

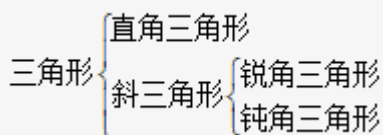
(2) 在三角形内一条边对着一个角, 那么这个角就叫做这个边的**对角**.

如: BC 的对角是 **$\angle A$** , AC 的对角是 **$\angle B$** .

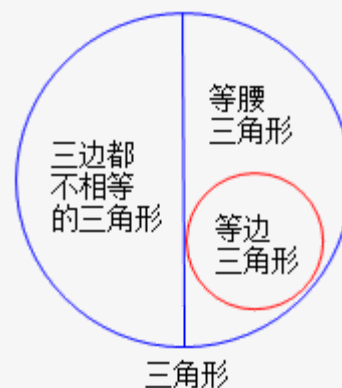
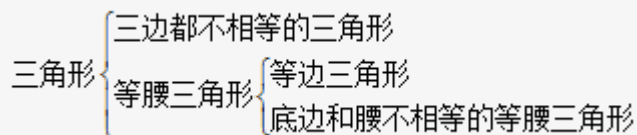


【备注】4、三角形的分类：

①按角分类：



②按边分类：



5、三角形的稳定性：

如果三角形的三条边固定，那么三角形的大小和形状就可以完全确定。三角形的这个性质叫做三角形的稳定性。

三角形具有稳定性，四边形不具有稳定性。

三角形的稳定性是三角形特有的性质，只要三角形的三边确定，三角形的形状就确定了。

【注意】

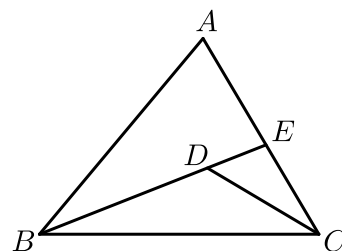
判断某些图形是否具有稳定性，就是看他的基本组成部分是不是三角形。

若是，则具有稳定性；若不是则不具有稳定性。

 举个“栗子”

 栗子1

1. 图中三角形的个数是（ ）。



A. 3个

B. 4个

C. 5个

D. 6个

【备注】 考察数三角形的个数，注意不重不漏

【答案】 C

【解析】 图中三角形由 $\triangle ABC$ ， $\triangle ABE$ ， $\triangle BEC$ ， $\triangle BDC$ ， $\triangle DEC$ 。

故选C。

【标注】【知识点】三角形的个数

 栗子2

2. 下列说法正确的是（ ）。

A. 三角形按边分类可分为不等边三角形和直角三角形

B. 三角形按角分类可分为锐角三角形和钝角三角形

C. 等腰三角形可分为等边三角形和底边与腰不相等的等腰三角形

D. 等边三角形不是等腰三角形

【备注】 考察三角形的分类，按边分类与按角分类要分清，注意等边三角形属于特殊的等腰三角形

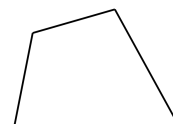
【答案】 C

【解析】 略。

【标注】【知识点】三角形的分类

栗子3

3. 要使四边形木架（用四根木条钉成）不变形，至少要再钉上的木条的根数为（ ）。

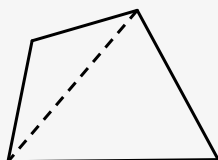


- A. 一根 B. 两根 C. 三根 D. 四根

【备注】考察三角形的稳定性，关键点是连接对角线，将原图形划分成几个三角形
可以继续提问五边形，六边形等规则与不规则图形

【答案】A

【解析】

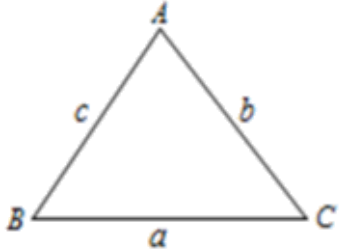


钉一根木条构成2个三角形，三角形具有稳定性。

故选A。

【标注】【知识点】三角形的稳定性

二、三角形的三边关系

	定理	三角形两边之____大于____。 举例：_____
	推论	三角形两边之____小于____。 举例：_____

【备注】（1）定理：三角形两边之和大于第三边。

上述内容可以表示为： $a + b > c$ ， $b + c > a$ ， $c + a > b$ 。

理论依据：两点之间，线段最短。

（2）推论：三角形两边之差小于第三边。

理论依据：由 $a + b > c$ ，根据不等式的性质，得 $c - b < a$ 。

【注意】

①三角形两边之和大于第三边指的是三角形任意两边之和大于第三边，
即有 $a + b > c$ ， $b + c > a$ ， $c + a > b$ 三个不等式同时成立。

②判断三条线段能否构成三角形，可看**两条较短线段之和**是否大于较长线段，大于可构成，否则不能构成。

【总结】

①判断长度为 a, b, c （其中 $a < b < c$ ）三条线段能否构成三角形，
只需判断 $a + b$ 是否大于 c 。

若 $a + b > c$ ，则可以构成三角形；若 $a + b \leq c$ ，则不可以构成三角形。

②已知三角形两边长为 $a, b(a > b)$ ，第三边 x 的取值范围 $|a - b| < x < a + b$ ，周长 C 的取值范围 $2a < C < 2(a + b)$ 。

 举个“栗子”

 栗子4

【知识点拨】

判断三条线段能否组成三角形，只需判断最小的两边之和是否大于第三边，
求三角形第三边的长或取值范围，利用|两边之差| < 第三边 < 两边之和

4. 下列给出的各组线段中，能构成三角形的是（ ）。

A. 5, 12, 13

B. 5, 12, 7

C. 8, 18, 7

D. 3, 4, 8

【备注】直接计算任意两边之和与第三边进行大小比较即可

【答案】 A

【解析】 A 选项： $5 + 12 > 13$ ，能构成三角形，故本选项正确。

B 选项： $5 + 7 = 12$ ，不能构成三角形，故本选项错误。

C 选项： $8 + 7 < 18$ ，不能构成三角形，故本选项错误。

D 选项： $3 + 4 < 8$ ，不能构成三角形，故本选项错误。

故选 A。

【标注】【知识点】判断能否构成三角形

5. 已知三角形的三边长分别为 $2, x, 13$, 若 x 为正整数, 则这样的三角形的个数是()个.

A. 2

B. 3

C. 5

D. 13

【备注】首先利用定理和推论写出 x 的取值, 再结合 x 为整数进行取舍

【答案】 B

【解析】第三条边的取值范围 $13 - 2 < x < 13 + 2$, 即 $11 < x < 15$,

$\therefore x$ 可能为 $12, 13, 14$.

$\therefore$ 这样的三角形个数是3个.

【标注】【知识点】整数边问题

6. 设三角形三边之长分别为 $3, 8, 1 - 2a$, 则 a 的取值范围为().

A. $-6 < a < -3$

B. $-5 < a < -2$

C. $-2 < a < 5$

D. $a < -5$ 或 $a > 2$

【备注】用同样的技巧, 注意解不等式不要出错

【答案】 B

【解析】由题意得: $8 - 3 < 1 - 2a < 8 + 3$,

解得: $-5 < a < -2$.

故选B.

【标注】【知识点】求三角形第三边的取值范围

7. 若 a, b, c 是一个三角形的三边, 且 a, b 满足 $|a - 4| + \sqrt{7 - b} = 0$. 则最长边 c 的取值范围为 ____.

【备注】除利用定理推论外, 还要注意 c 为最长边

【答案】 $7 \leq c < 11$

【解析】由题意得: $a - 4 = 0, 7 - b = 0$,

解得: $a = 4, b = 7$,

$\therefore c$ 边最长,

$\therefore 7 \leq c < 11$,

故答案为: $7 \leq c < 11$.

【标注】【知识点】求三角形第三边的取值范围

【知识点拨】

求等腰三角形的周长往往有“陷阱”，需要去检查

8. 已知三角形的两边长是2cm, 3cm, 则该三角形的周长 l 的取值范围是() .

- A. $1 < l < 5$ B. $6 < l < 10$ C. $1 < l < 6$ D. $5 < l < 9$

【备注】先写出第三边的范围，再列出周长的范围

【答案】B

【解析】三角形的两边长是2cm, 3cm,
第三边的取值范围是大于1而小于5,
又∵另外两边之和是5,
∴周长的取值范围是 $6 < l < 10$.
故选：B.

【标注】【知识点】求三角形周长的取值范围

9. 若 $(a-2)^2 + |b-3| = 0$, 则以 a 、 b 为边长的等腰三角形的周长为() .

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 7或8

【备注】与等腰三角形结合，分类讨论2,2,3与3,3,2是否能构成三角形

【答案】D

【解析】 $(a-2)^2 + |b-3| = 0$,

$$\therefore \begin{cases} a-2=0 \\ b-3=0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}.$$

令第三边为 c ,

则 $3-2 < c < 3+2$,

$1 < c < 5$.

由等腰三角形可知三边为2、2、3或2、3、3.

故周长为7或8.

【标注】【知识点】已知两边求第三边或周长

10. 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 其周长为20cm, 则 AB 边的取值范围是() .

- A. $1\text{cm} < AB < 4\text{cm}$ B. $5\text{cm} < AB < 10\text{cm}$ C. $4\text{cm} < AB < 8\text{cm}$ D. $4\text{cm} < AB < 10\text{cm}$

【备注】与等腰三角形结合, 设未知数解题, 注意 $20-2x$ 要大于零

【答案】 B

【解析】 $\because$ 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 其周长为20cm,

$\therefore$ 设 $AB = AC = x\text{cm}$, 则 $BC = (20 - 2x)\text{cm}$,

$$\therefore \begin{cases} 2x > 20 - 2x \\ 20 - 2x > 0 \end{cases} ,$$

解得 $5\text{cm} < AB < 10\text{cm}$.

【标注】【知识点】三角形的三边关系

栗子6

11. 若一个三角形的三边长分别是 $x\text{cm}$ 、 $(x+5)\text{cm}$ 、 $(13-x)\text{cm}$, 则 x 的取值范围是 _____ .

【备注】利用任意两边之和大于第三边, 但要注意到 $x+5$ 已经大于 x , 故无需讨论 $x+5$ 与 $13-x$ 的和大于 x 这种情况

【答案】 $\frac{8}{3} < x < 8$

【解析】由三角形两边之和大于第三边得 $\begin{cases} x + x + 5 > 13 - x \\ x + 5 - 13 + x < x \end{cases}$

解得: $\frac{8}{3} < x < 8$.

【标注】【知识点】与三边关系有关的证明

栗子7

12. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长, 化简 $|a+b-c| - |c-a-b|$ 的结果为() .

- A. $2a+2b-2c$ B. $2a+2b$ C. $2c$ D. 0

【备注】利用三边关系化简绝对值, 易错点是去掉绝对值后要添括号

【答案】 D

【解析】方法一: $\because a, b, c$ 是 $\triangle ABC$ 的三条边长,

$$\therefore a + b - c > 0, c - a - b < 0,$$

$$\therefore \text{原式} = a + b - c + (c - a - b)$$

$$= 0.$$

方法二： $\because a, b, c$ 是三角形三

边，

$$\therefore a + b > c,$$

$$\therefore a + b - c > 0, c - a - b < 0,$$

$$\therefore |a + b - c| - |c - a - b|$$

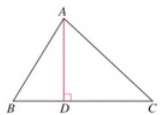
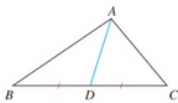
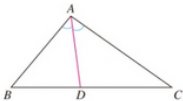
$$= a + b - c + c - a - b$$

$$= 0.$$

故选D.

【标注】【知识点】与三边关系有关的证明

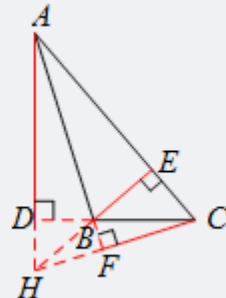
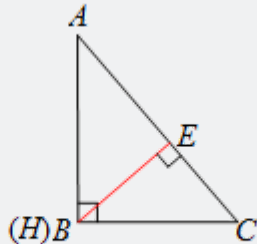
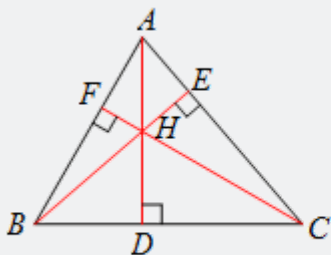
三、三角形中重要线段

图形	重要线段	概念	几何语言表示	三心
	高线	由三角形的一个顶点向它的对边所在的直线引垂线，顶点和垂足之间的线段	$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的 BC 上的高线， $\therefore$ _____	垂心
	中线	三角形中，连接一个顶点和它的对边中点的线段	$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线， $\therefore$ _____	重心
	角平分	三角形的一个内角的平分线和对边交点所形成的线段	$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle BAC$ 的平分线， $\therefore$ _____	内心

【注意】

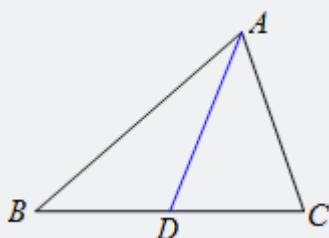
- ①三角形的高线、中线、角分线均为线段
- ②三角形的角平分线位于三角形内部且交于一点，交点叫内心；
三角形的中线位于三角形内部且交于一点，交点叫重心；
不同三角形的高线

锐角三角形的高线在内部，直角三角形的高线两条在边上、一条在内部，钝角三角形的高两条在外部、一条在内部，并且都交于一点，交点可以位于三角形内部、直角顶点处、外部，交点叫垂心；



③三角形的一条中线把面积平分

三角形中线平分三角形的面积：



证明：

$\because AD$ 是三角形 ABC 的中线，

$\therefore BD = CD$ ，

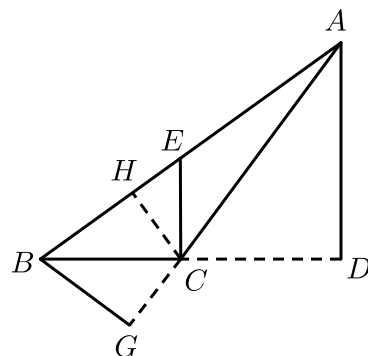
$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot h$ ， $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} DC \cdot h$

$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC}$

🍎 举个“栗”子

栗子8

13. 如图， $AD \perp BC$ ， $CE \perp BC$ ， $CH \perp AB$ ， $BG \perp AC$ ，则在 $\triangle ABC$ 中， BC 边上的高是（ ）。



A. 线段 CE

B. 线段 CH

C. 线段 AD

D. 线段 BG

【备注】利用高线的定义直接进行判断，延长线上的高一直是学生易错点

【答案】C

【解析】 $\because AD \perp BC$ ，
 $\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\triangle ABC$ 边 BC 上的高为线段 AD 。

【标注】【知识点】作三角形的高，中线和角平分线

14. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 45^\circ$ ，高 BD 和 CE 所在直线交于 H ，则 $\angle BHC$ 的度数是 _____。

【备注】易错题，没有图的题自己画图，需注意分类讨论

【答案】 135° 或 45°

【解析】①如图1，

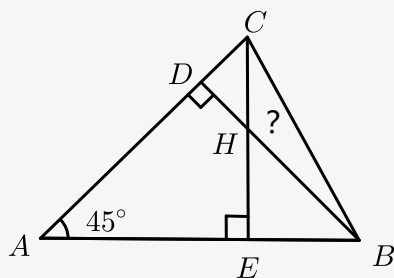


图1

$\triangle ABC$ 是锐角三角形时，

$\because BD, CE$ 是 $\triangle ABC$ 的高线，

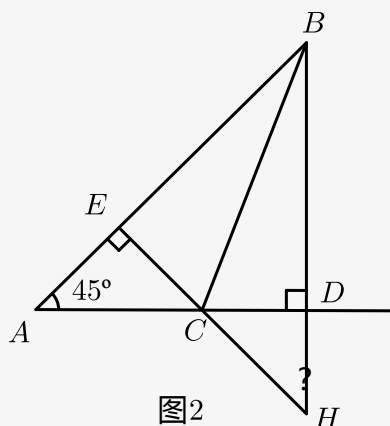
$\therefore \angle ADB = 90^\circ, \angle BEC = 90^\circ$ ，

在 $\triangle ABD$ 中， $\angle A = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BHC = \angle ABD + \angle BEC = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ 。

②如图2，

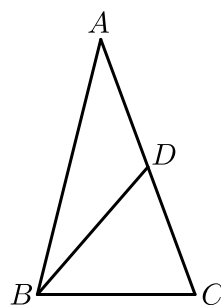


$\triangle ABC$ 是钝角三角形时，
 $\therefore BD, CE$ 是 $\triangle ABC$ 的高，
 $\therefore \angle AEC = 90^\circ, \angle CDH = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle A + \angle ACE = 90^\circ, \angle BHC + \angle HCD = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle ACE = \angle HCD$ （对顶角相等），
 $\therefore \angle BHC = \angle A = 45^\circ$ ，
 综上所述： $\angle BHC$ 的度数是 135° 或 45° 。

【标注】【知识点】三角形内角和的应用

栗子9

15. 如图，已知 BD 是 $\triangle ABC$ 的中线， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，且 $\triangle ABD$ 的周长为11，则 $\triangle BCD$ 的周长是（ ）。



A. 9

B. 14

C. 16

D. 无法确定

【备注】利用中线定义以及公共边 BD ，得到 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的差为 AB 与 BC 的差，直接计算即可

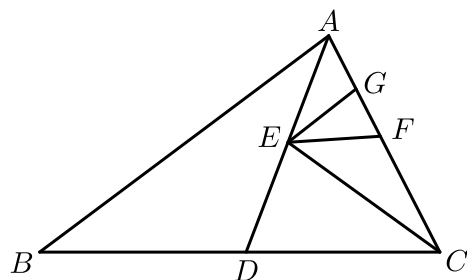
【答案】A

【解析】 $\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，
 $\therefore CD = AD$ 。

$\because \triangle ABD$ 周长为 11 ,
 $\therefore AB + BD + AD = 11$,
 $\therefore AB + BD + CD = 11$.
 $\therefore AB = 5$,
 $\therefore BD + CD = 6$.
 $\therefore C_{\triangle BCD} = BD + CD + BC$,
 又 $\because BC = 3$,
 $\therefore C_{\triangle BCD} = 6 + 3 = 9$.
 故选 A .

【标注】【知识点】三角形中线与周长差问题

16. 如图 $\triangle ABC$ 中 , D 、 E 、 F 、 G 分别是 BC 、 AD 、 AC 、 AF 的中点 , 且 $S_{\triangle EFG} = 2$, 则 $S_{\triangle ABD} =$ _____ .



【备注】 利用中线平分面积 , 一层层进行推导 , 得到 $\triangle EFG$ 与 $\triangle ABD$ 的数量关系

【答案】 16

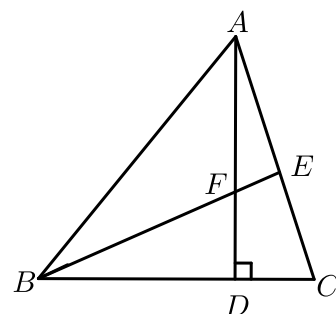
【解析】 $\because G$ 为 AF 中点 ,
 $\therefore AG = GF$,
 $\therefore S_{\triangle AGE} = S_{\triangle EFG}$,
 $\because F$ 为 AC 中点 ,
 $\therefore AF = FC$,
 $\therefore S_{\triangle EFC} = S_{\triangle AEF} = 2S_{\triangle EGF}$,
 $\therefore S_{\triangle AEC} = 4S_{\triangle EFG}$,
 $\because E$ 为 AD 中点 ,
 $\therefore AE = ED$,
 $\therefore S_{\triangle AEC} = S_{\triangle CDE}$,
 $\therefore S_{\triangle ADC} = 2S_{\triangle AEC} = 8S_{\triangle EFG}$,

$$\begin{aligned}
&\because D \text{ 为 } BC \text{ 中点,} \\
&\therefore BD = CD, \\
&\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC} = 8S_{\triangle EFG}, \\
&\therefore S_{\triangle EFG} = 2, \\
&\therefore S_{\triangle ABD} = 16.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】与中线或等分线有关的等积变换

栗子10

17. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的高, BE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, BE, AD 相交于点 F , 若 $\angle BAD = 40^\circ$, 则 $\angle BFD =$ _____ (度) .



【备注】利用角分线, 高线的相关概念进行倒角

【答案】65

【解析】 $\because AD$ 是高线,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAD = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 50^\circ,$$

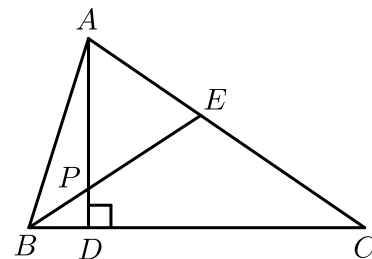
$$\because BE \text{ 是角平分线},$$

$$\therefore \angle FBD = 25^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle FBD \text{ 中, } \angle BFD = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ.$$

【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

18. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的高线, BE 是一条角平分线, AD, BE 相交于点 P , 已知 $\angle EPD = 125^\circ$, 求 $\angle BAD$ 的度数.



【备注】 求 $\angle BAD$ 先求出 $\angle ABD$ ，再结合角平分线进行求解
可以带学生写一下过程，规范解答题的步骤

【答案】 20° .

【解析】 $\because AD$ 是 BC 边上的高线， $\angle EPD = 125^\circ$ ，
 $\therefore \angle CBE = \angle EPD - \angle ADB = 125^\circ - 90^\circ = 35^\circ$ ，
 $\because BE$ 是一条角平分线，
 $\therefore \angle ABD = 2\angle CBE = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\angle BAD = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

【标注】 【知识点】 三角形-内角角分线